いしずえ通信第 26 号(2018. 1. 5)別添

Y. L. Chang の解について

（一社）基礎構造研究会代表理事　杉村義広

12 月 2 日（土）に行われた「建築基礎設計の実技講習会 in 東京」で妙なことに気づいた。

杭の水平抵抗を検討する際に必要となる係数βの計算で各量の単位を揃えるのが面倒であり、演習ではその説明にかなりの時間を要するために、肝心の理論解を導く原理のところがおろそかになってしまう心配が生じていることである。筆者らが解析を行っていた時代には t/m^2、kg/cm^{2}の単位で済んでいたのでそれほど苦労することもなかったが、それでもβの計算では 10 の〇乗が出て来て戸惑うこともあった。それに比べて今日では SI 単位系を用いることになったので、杭の弾性係数 E の N/mm^{2}や断面２次モーメント I の mm^{4}などに合わせて杭径や地盤反力係数 k_h を mm や N/mm^{3}の単位として計算する必要が生じており、それらの計算の面倒さが倍加することになった。得られたβの単位 mm^{-1}を最後に m^{-1}に変換することまでを加えると、これらの単位換算だけで疲れ切ってしまう感があり、肝心の理論解に至る原理を把握するまでにはなかなか手が回らなくなっている状況が見られたのである。本末転倒であるが、これが現状のようである。そこで、ここではその補足を試みてみたい。よく紹介されることのある Y. L. Chang の解について、それが得られた経緯などを改めて思い出や感想も交えながら考察してみたいと思う。

Chang の解として知られているのは、L. B. Feagin の論文「Lateral Pile-Loading Tests, Trans. ASCE, Paper No.1959, 1937, pp.236-254」に引き続いて 6 番目の Discussion 発言者として Chang が発表したものであり、その内容は p.272-278 に収められている。その中で Chang は弾性支承上の梁曲げ理論を適用し、次の 4 つの仮定をおいて論を進めている。

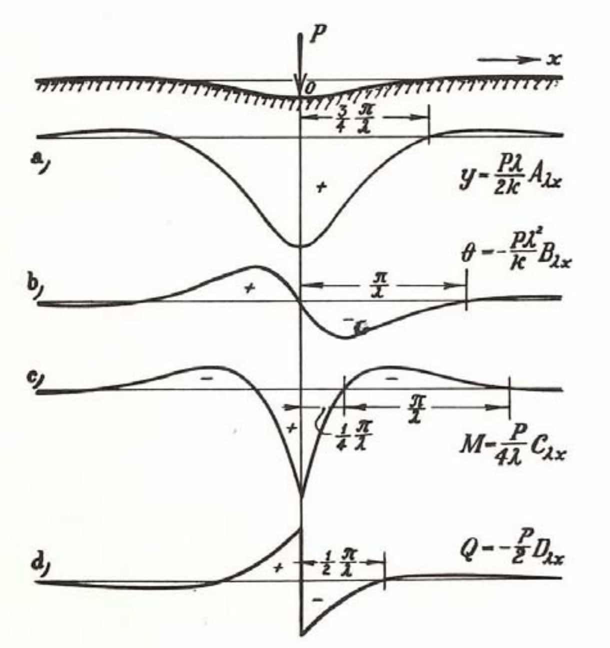
1）杭の上端は基礎の中に深く埋め込まれて回転に対して固定されている。

2）杭は無限の長さとする。

3）土の弾性係数（elastic modulus of soil）E_sは深さ方向に一定とする。

4）受動圧（passive pressure）pは水平変位yに対して比例する（$p=-E_s y$）。

Feagin の研究がミシシッピー川の水門に使用された木杭あるいはコンクリート杭の水平抵抗を調べるために巨大な基礎に群杭を配した試験体の水平載荷試験であり、それを解析的に解明することを試みて“杭頭が深く埋め込まれているために回転拘束である”としたものが第 1 の仮定である。ただ、これは弾性支承上の梁（通常は無限長として扱う）に集中荷重が作用した場合の片側を取り出した場合と同じであることに気づいて、Chang がその理論解を適用したものと筆者は推定したい。UC Berkeley に筆者が留学していたときに本屋で偶然に見つけて、それ以来参考にしている「M. Hetényi: BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION, THEORY WITH APPLICATIONS IN THE FIELDS OF CIVIL AND MECHANICAL ENGINEERING, ANN ARBOR: THE UNIVERSITY OF MICHIGAN PRESS, 1946」の中からその図（Fig.5）を以下に引用してみる。



Fɪɢ. 5

この図では、上から順に梁の変位 y、たわみ角 θ、曲げモーメント M、せん断力 Q が示されているが、原点 $x=0$ で変位は最大となり両側へ線対称に反転する分布を示し、距離が無限大ではゼロとなることが見られる。また、原点でたわみ角 θ がゼロとなること、曲げモーメント M は最大で反転していること、せん断力 Q は集中力 P の半分 $P/2$ ずつが反転していることも見られる。例えば、これを原点で切って片側だけを縦に配置すれば杭の場合となることを Chang が気づいたのだと想像できる。すなわち、片側だけなので半無限長となってそのまま仮定２に繋がるし、水平変位 y と曲げモーメント M は杭頭で最大となり、たわみ角 θ はゼロとなることも表現出来る。ただ、片側だけとなったためにせん断力は集中力 P そのものと一致すること、すなわち２倍にして考える必要がある点、したがって、ほかの量もそれぞれ２倍となることを忘れてはならないのは言うまでもないが…。

Chang は第４の仮定から、基本方程式は次式で表されるとしている。

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = p = -E_s y \tag{32}$$

ここで、E は杭材の弾性係数、I は断面２次モーメントである。E_s について Chang は何もコメントしていないが、今日的に言えば $k_h B$（k_h：地盤反力係数 kN/m³、B：杭径 m）である。これに続いて Chang は $\beta = \sqrt[4]{\frac{E_s}{4EI}}$ とおけば、一般解は次式で表せるとしている。

$$y = e^{\beta x}(A\beta x + B\,\beta x) + e^{-\beta x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$$

実は、これら基本方程式から一般解までの式展開および以降の解の誘導までについても、Chang は S. Timoshenko の「STRENGTH OF MATERIALES, Part II　Advanced Theory and Problems, New York D. Van Nostrand, 1930」を参考文献に挙げて、それに基

づいて導いているのである（文章からは基本方程式だけを引用したかのように読めるのは少し気になるが）。筆者は若い頃に Chang の論文は読んでいたが、Timoshenko の原典まで遡って確認するということはしていなかったので、今回改めてその書を読んでみることにした。すると、係数 β については $\sqrt[4]{\frac{k}{4EI_z}} = \beta$ と表現されており、弾性反力が E_s ではなく k と表されている以外は Chang の解析と全く同じ定義であり、積分定数 A、B、C、D を決める手順も Chang は Timoshenko の書に倣って導いていることが確認出来た。すなわち、無限長の仮定２から定数 A、B は 0 とならなければならないこと、したがって積分定数 C、D と $e^{-\beta x}$ を含む項だけが残ること、仮定１から杭頭では回転拘束であるからたわみ角 θ がゼロとなるとの境界条件を適用することで C＝D も求められ、これを Chang は f とおいて以下の解に到達していることが確認出来たのである。

$$y = f e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) \tag{36}$$

Timoshenko の書によれば f の中味は、x=0 でのせん断力が $-P/2$ であることから $C = \frac{P}{8\beta^3 EI_z}$ となることが示されており（Hetényi の Fig.5 にでもその値が示されている）、さらに、前述のように無限長の梁のどちらか半分だけを考えているので、せん断力は２倍の $-P$ となり、結局、今日的な表現をすれば杭頭（x=0）での変位は 2 倍にした $y_0 = \frac{P}{4EI\beta^3}$ で示される。これは杭頭固定の水平変位としてよく知られている解と一致していることが確認出来るであろう。

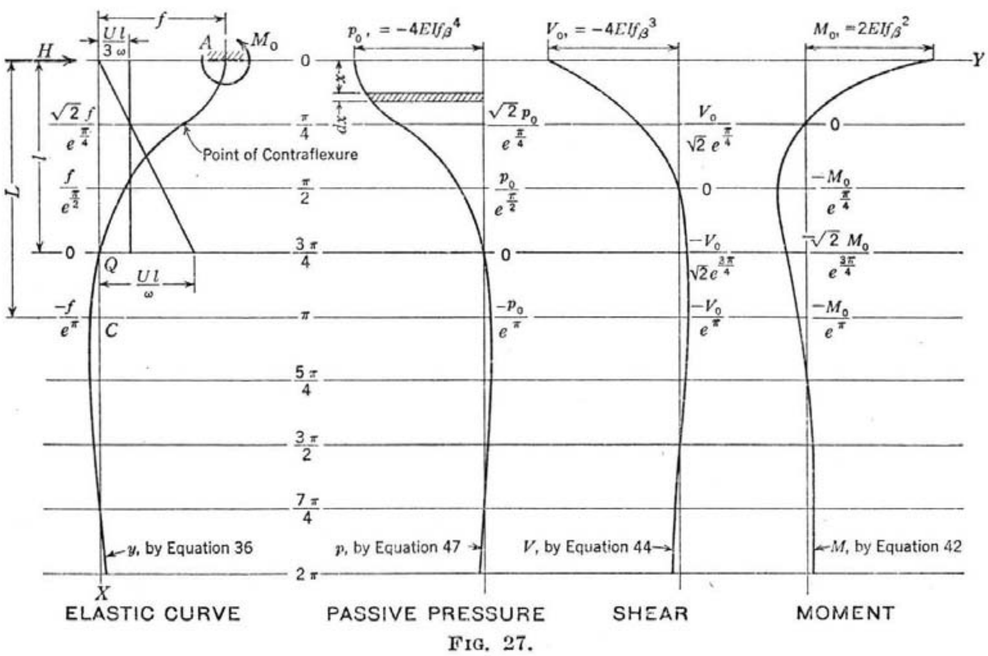


Fig. 27.

以上から、Chang の論文は係数 β の記号も含めてほとんどすべて Timoshenko の書によっていることが判明したのである。Chang は結果として Fig.27 を示している。ここでは

第一不動点$\ell = 3\pi/4$まで〔上記（36）式を$\cos\beta\ell + \sin\beta\ell = 0$とおいて得られる$\tan\beta\ell = -1$を解けば$3\pi/4$の値が得られる〕地盤反力$E_s$が直線的に増加する三角形分布と、上から1/3の深さでの値で等分布に置き換えられた図が目立つが、これが仮定3に繋がるものである。土質力学的な観点から厳格に言えば、実はこの点が彼のOriginarityであるということになるので、これについて少し補足すれば、Feaginの実験が砂質地盤で行われていることから三角形の地盤反力分布を想定したこと、深さの1/2ではなく1/3の値を等分布反力としたのは杭の変位が大きくなる範囲に配慮したことなどが想像され、妥当な判断であったと評価できる。結局、この点を除いてChangの論文の大半はTimoshenkoの弾性支承上の梁曲げ理論の解析手順によっているということになるが、杭の水平抵抗問題に適用したのはChangが最初であるという点は評価に値すると思われる。少なくとも、Feaginの実験に対してやはり解析的な検討を発表した最初のDiscussion発言者であるA. E. Cummingsの内容(pp.255-264に収められている)よりは杭の実状に近い解析を行ったと評価してよいであろう。なぜなら、Cummingsの論文は杭頭からある深さLまでを（Cummings自身が"some unknown length L"と言っている）両端固定の柱と仮定して解析を進めているから（したがって地盤反力は考慮されていない）解析精度的にもChangの内容よりは見劣りするからである。

以上でChangの解についての話は終わりであるが、講習会の席などで"なぜβなのですか"との質問に出会うことが多いので、ここでは係数βについても整理しておこう。

βを$k/4EI$の4乗根の形で表すのは4階の常微分方程式を解く常套手段であり、杭頭の水平変位y_0に$4Ei\beta^3$が含まれていることからも推定できるが、研究者によってどのような文字と定義がされてきたのかをおさらいしてみる。

Chang（1937）はTimoshenko（1930）にならってβを使い、$k/4EI$の4乗根としたのはすでに述べた。また、Hetényi（1946）のFig.5を引用した際にλの文字が見えることもすでに示したが、この場合は$\lambda = \sqrt[4]{k/4EI}$と表現されており、$k$はmodulus of the foundationであると説明されている。

K. Hayashiの「Theorie des Trägers auf elastischer Unterlarge und ihre Anwendung auf den Tiefbau, Belin・Verlag von Julius Springer, Japan・Kokusairiko-Kenkyusha, Inc., 1921」にも触れておく必要がある。この書はHetényiの書を読んでいるときに参考書として引用されているのを知って、それ以来探していたのであるが、大分後になって東京丸善の書棚で偶然に見つけて喜び勇んで購入したことを覚えている。ただ、筆者は第2外国語としてフランス語を選択したのでドイツ語は全くお手上げであり、図や式を楽しんで眺めるだけで中味の読みこなしが出来ていない。そこでドイツ語の辞書を頼りに題名だけを「弾性支承上の梁理論および地下工事上の応用」と訳しておくが、解析モデルがFig.2に示されているので、それを参照して中味を類推すると以下のようになっている。

基本方程式は$EJ\dfrac{d^4y}{dx^4} + bKy = bq$、係数は$\sqrt[4]{\dfrac{4EJ}{bK}} = L$で表されている。$EJ$は梁の曲げ剛性であり、$b$は梁の幅、$p = Ky$が弾性支承の反力である。$q$はFig.2に示されているように集中荷重$P$のほかに分布荷重が作用している一般的な形として示されているものであるが、こ

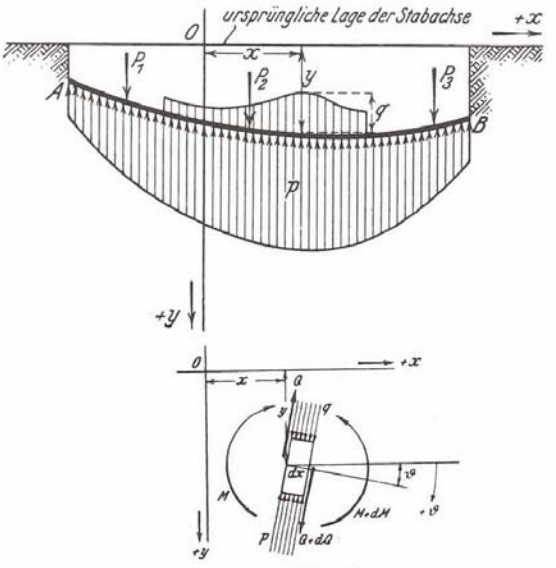


Fig. 2.

こで問題としている係数βに対応する記号に注目すればLが使われていることがわかる。それとともに4乗根の中味が$4EJ/bk$と、分子、分母が逆転している事が特徴的である。

以上の流れからすれば、βの文字が使われたのは1930年のTimoshenkoが最初で、1937年のChangがそのまま受け継いだという構図が浮かんで来る。そして何故βなのか、については"係数α"もよく使われる常套手段であるので、それを嫌ったTimoshenkoが"係数β"としたのではないか、というのが筆者の想像による感想である。

注 : Timoshenkoの書では弾性支承上の梁曲げ理論についてHayashiの書が紹介されていると同時に、それより以前にはE. Winklerの「Die Lehre v. d. Elastizität u. Festigkeit, Prag, 1867, p.182」やA. Zimmermannの「Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues, Berlin, 1888」の研究例があることが注記されている。また、Hayashi以後も、Wieghardt: Zeitschrift für ange-wandte Math. U. Mech., Vol. 2 (1922), K. v. Sanden and Schleicher: Beton und Eisen, 1926, Heft 5, Pasternak: Beton u. Eisen, 1926, Heft 9 and 10, W. Prager: Zeitschrift f. angewandte Math. U. Mech., Vol,7, 1927, p.354 などの研究例があることが紹介されている。これらは弾性支承上の梁曲げ理論に関する研究がいかに多く続けられているかを示すものである。しかし、ほとんどすべて入手困難であるので、参照することが出来ていない。したがって、本稿は遡っての文献調査が未完のまま書いたものであることをご理解いただきたい。